PART2 不定形の極限

要点整理と公式

要点 ① 不定形の極限

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ において $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$ のとき

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=$ （形式的に（定数）$+\infty$ となる形）

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=$ （形式的に（定数）$-\infty$ となる形）

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=$ （形式的に $\dfrac{(\text{定数})}{\infty}$ となる形）

であり

$\alpha>0$ のとき $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n=$ （形式的に（正の定数）$\times\infty$ となる形）

$\alpha<0$ のとき $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n=$ （形式的に（負の定数）$\times\infty$ となる形）

が成り立つが

$\alpha=0$ のとき $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$ （形式的に　　　となる形）

は，収束する場合も発散する場合もある。

また，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ において $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$ のとき

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=$ （形式的に $\infty+\infty$ となる形）

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n=$ （形式的に $\infty\times\infty$ となる形）

が成り立つが，

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ （形式的に　　　となる形）

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ （形式的に　　となる形）

は，収束する場合も発散する場合もある。

形式的に $0\times\infty$，$\infty-\infty$，$\dfrac{\infty}{\infty}$，$\dfrac{0}{0}$ となる極限を，「　　　　　」の極限という。不定形の極限を求めるためには，適切な式変形が必要となる。

(ex)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{3n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\qquad}{\qquad}=$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2n^2-n)=\lim_{n\to\infty}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2=$　　，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)=$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2n^2-n)=$

2 (1) 次の極限を求めよ。

(i) $\lim_{n\to\infty}(n^2-3n)$ (ii) $\lim_{n\to\infty}(n-4n^3)$

(2) 次の極限を求めよ。

(i) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+5}{3n^2-2n}$ (ii) $\lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{n^2-3}$ (iii) $\lim_{n\to\infty}\frac{1-n^3}{1-4n^2}$

Point Pickup

不定形の極限

形式的に $\infty-\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ (不定形)となる極限

→ 式変形により極限が求められる形にする。

・n の整式 → もっとも次数が高い項 n^k で「　　　」

・n の分数式 → 分母におけるもっとも次数が高い項 n^k で「分母・分子を　　　」

第 2 講 PART2 確認問題

次の極限を求めよ。答えは下の①～⑥のうちから選べ。

1 $\lim_{n\to\infty}(3n-2n^2)=$ ア

① 0　② 1　③ -1
④ 2　⑤ ∞　⑥ $-\infty$

2 $\lim_{n\to\infty}(n^3-4n-5)=$ イ

① 0　② 1　③ -1
④ 2　⑤ ∞　⑥ $-\infty$

3 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-1}{n^2+3n}=$ ウ

① 0　② 1　③ -1
④ 2　⑤ ∞　⑥ $-\infty$

4 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n^2+1}=$ エ

① 0　② 1　③ -1
④ 2　⑤ ∞　⑥ $-\infty$

5 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^3-1}{2n^2+1}=$ オ

① 0　② 1　③ -1
④ 2　⑤ ∞　⑥ $-\infty$

PART2 不定形の極限

2 (1) 次の極限を求めよ。

(i) $\lim_{n\to\infty}(n^2-3n)$　　(ii) $\lim_{n\to\infty}(n-4n^3)$

(2) 次の極限を求めよ。

(i) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+5}{3n^2-2n}$　　(ii) $\lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{n^2-3}$　　(iii) $\lim_{n\to\infty}\frac{1-n^3}{1-4n^2}$

[解答]

(1)(i) $\lim_{n\to\infty}(n^2-3n)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\frac{3}{n}\right)=\infty$

(ii) $\lim_{n\to\infty}(n-4n^3)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(\frac{1}{n^2}-4\right)=-\infty$

(2)(i) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+5}{3n^2-2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{5}{n^2}}{3-\frac{2}{n}}=\frac{2}{3}$

(ii) $\lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{n^2-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{3}{n^2}}=0$

(iii) $\lim_{n\to\infty}\frac{1-n^3}{1-4n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}-n}{\frac{1}{n^2}-4}=\infty$

第 2 講　PART2 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：⑥

[解説]

$$\lim_{n\to\infty}(3n-2n^2)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{3}{n}-2\right)$$ [A]

[A]　最も次数が高い n^2 でくくる。

$\lim_{n\to\infty}n^2=\infty$，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}-2\right)=-2$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}(3n-2n^2)=-\infty$$

2　**[正解]** イ：⑤

[解説]

$$\lim_{n\to\infty}(n^3-4n-5)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(1-\frac{4}{n^2}-\frac{5}{n^3}\right)$$ [B]

[B]　最も次数が高い n^3 でくくる。

$\lim_{n\to\infty}n^3=\infty$，$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{n^2}-\frac{5}{n^3}\right)=1$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}(n^3-4n-5)=\infty$$

3　**[正解]** ウ：④

[解説]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{n^2+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}}$$ [C]

[C]　分母・分子を n^2 で割る。

$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n^2}\right)=2$，$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)=1$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{n^2+3n}=2$$

4　**[正解]** エ：①

[解説]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$$ [D]

[D]　分母・分子を分母における最も次数が高い n^2 で割る。

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)=0$,　$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=1$ であるから,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n^2+1}=\mathbf{0}$$

5　**[正解]** オ：⑤

[解説]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{2n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}}$$ [E]

[E]　分母・分子を分母における最も次数が高い n^2 で割る。

$\lim_{n\to\infty}\left(n-\frac{1}{n^2}\right)=\infty$,　$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n^2}\right)=2$ であるから,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{2n^2+1}=\boldsymbol{\infty}$$